生成函数在计数与求解递归式中的应用

问题求解 Open Topic I

黄文睿　学号：221180115

南京大学　2022 级计算机拔尖班

2023 年 3 月 17 日

数列，作为一个整体！

思考题

一个数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，可不可以用一个整体来表达，和代数处理？

数列，作为一个整体！

思考题

一个数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，可不可以用一个整体来表达，和代数处理？

$$\sum_{i\geq 0} a_i \text{ or } \prod_{i\geq 0} a_i?$$

数列，作为一个整体！

思考题

一个数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，可不可以用一个整体来表达，和代数处理？

$$\sum_{i\geq 0} a_i \text{ or } \prod_{i\geq 0} a_i?$$

失去了**有序性**！
无法处理！

生成函数与数列

一个数列的问题

一个数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，可不可以用一个整体来表达，和代数处理？

次序用什么来体现？需要给每一项一种特殊的“标记”！

生成函数与数列

一个数列的问题

一个数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，可不可以用一个整体来表达，和代数处理？

次序用什么来体现？需要给每一项一种特殊的“标记”！

引入形式化参数 z. 给第 i 项一个“标记” $D_i(z)$. 考虑一个和式：

$$\sum_{i \geq 0} a_i D_i(z).$$

这样就有了次序性，我们把它叫做这个**数列**的**生成函数** (GF)!

尝试取取不同的 $D_i(z)$ 吧!

取 $D_i(z) = z^i$, 我们得到了**普通型生成函数** (OGF):

$$F(z) = \sum_{i\geq 0} a_i z^i.$$

取 $D_i(z) = \frac{z^i}{i!}$, 我们得到了**指数型生成函数** (EGF):

$$F(z) = \sum_{i\geq 0} a_i \cdot \frac{z^i}{i!}.$$

取 $D_i(z) = \frac{1}{i^z}(i \geq 1)$, 我们得到了**狄利克雷生成函数** (DGF):

$$F(z) = \sum_{i\geq 1} a_i \cdot \frac{1}{i^z}.$$

如何解递推式

递推式的本质是数列的项与项之间的性质.

如何解递推式

递推式的本质是数列的项与项之间的性质.

让我们用生成函数**整体地**考虑整个数列.

一个见过很多次的数列

求个通项先

斐波那契数列:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_i = f_{i-1} + f_{i-2} (i \geq 2).$$

一个见过很多次的数列

求个通项先

斐波那契数列:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_i = f_{i-1} + f_{i-2} (i \geq 2).$$

尝试写出它的 OGF:

$$F(z) = \sum_{i \geq 0} f_i z^i$$

一个见过很多次的数列

求个通项先

斐波那契数列:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_i = f_{i-1} + f_{i-2} (i \geq 2).$$

尝试写出它的 OGF:

$$F(z) = \sum_{i \geq 0} f_i z^i$$

这没有用. 我们尝试化简.

一个见过很多次的数列

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{i\geq 0} f_i z_i \\
&= f_0 z^0 + f_1 z^1 + \sum_{i\geq 2}(f_{i-2} + f_{i-1}) z^i \\
&= f_0 + f_1 z + z^2 \sum_{j\geq 0} f_j z^j + z \sum_{k\geq 0} f_k z^k \\
&= z + zF(z) + z^2 F(z).
\end{aligned}
$$

这里做了代换 $j = i - 2, k = i - 1$.

GF 的封闭形式

根据上文的分析, 得到 $F(z) = z + zF(z) + z^2 F(z)$.

GF 的封闭形式

根据上文的分析，得到 $F(z) = z + zF(z) + z^2F(z)$.

抛弃敛散性分析，直接得到了一个优美的形式为

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

这样用有限项表示 GF 的形式叫 GF 的**封闭形式**.

GF 的封闭形式

根据上文的分析，得到 $F(z) = z + zF(z) + z^2F(z)$.

抛弃敛散性分析，直接得到了一个优美的形式为

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

这样用有限项表示 GF 的形式叫 GF 的**封闭形式**.

接下来怎么求 f_n 呢？要求的其实是 $[z^n]F(z) = [z^n]\dfrac{z}{1 - z - z^2}$.

GF 的封闭形式

根据上文的分析, 得到 $F(z) = z + zF(z) + z^2F(z)$.

抛弃敛散性分析, 直接得到了一个优美的形式为

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

这样用有限项表示 GF 的形式叫 GF 的**封闭形式**.

接下来怎么求 f_n 呢? 要求的其实是 $[z^n]F(z) = [z^n]\frac{z}{1 - z - z^2}$.

这就是 GF 的运算的事了.

组合对象

除求解递推式外，生成函数一大作用在于**描述组合对象**，方便**计数**.

组合对象

除求解递推式外，生成函数一大作用在于**描述组合对象**，方便**计数**.

根本逻辑是：组合对象的某种特性构成一个数列，再用 GF 来描述这个数列.

组合对象

除求解递推式外, 生成函数一大作用在于**描述组合对象**, 方便**计数**.

根本逻辑是: 组合对象的某种特性构成一个数列, 再用 GF 来描述这个数列.

e.g. 结点个数为 n 的二叉树个数.

GF 表达组合意义方便在哪?

卷积! 具有超强的组合意义.

GF 表达组合意义方便在哪?

卷积! 具有超强的组合意义.

对形式幂级数而言, 设 $G(z)=\sum_{i\geq 0} g_i z^i, H(z)=\sum_{i\geq 0} h_i z^i$.

卷积定义为

$$(G*H)(z)=\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i+j=k} g_i h_j\right) z^k.$$

OGF 的卷积

若三个 OGF 有形式为

$$F(z) = \sum_{i \geq 0} f_i z^i, G(z) = \sum_{i \geq 0} g_i z^i, H(z) = \sum_{i \geq 0} h_i z^i,$$

且有 $F = G * H$, 那么 $f_n = \sum_{i+j=n} g_i h_j$.

OGF 的卷积

若三个 OGF 有形式为

$$F(z)=\sum_{i\geq 0} f_i z^i, G(z)=\sum_{i\geq 0} g_i z^i, H(z)=\sum_{i\geq 0} h_i z^i,$$

且有 $F=G*H$, 那么 $f_n=\sum_{i+j=n} g_i h_j$.

这种卷积表达的是**集合的合并/无序组的合并/序列的拼接**.

EGF 的卷积

若三个 EGF 有形式为

$$F(z)=\sum_{i\geq 0} f_i\cdot\frac{z^i}{i!}, G(z)=\sum_{i\geq 0} g_i\cdot\frac{z^i}{i!}, H(z)=\sum_{i\geq 0} h_i\cdot\frac{z^i}{i!},$$

且有 $F=G*H$, 那么 $f_n=\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!\cdot j!}g_ih_j=\sum_{i+j=n}\binom{n}{i}g_ih_j.$

EGF 的卷积

若三个 EGF 有形式为

$$F(z)=\sum_{i\geq 0} f_i\cdot\frac{z^i}{i!},G(z)=\sum_{i\geq 0} g_i\cdot\frac{z^i}{i!},H(z)=\sum_{i\geq 0} h_i\cdot\frac{z^i}{i!},$$

且有 $F=G*H$, 那么 $f_n=\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!\cdot j!}g_ih_j=\sum_{i+j=n}\binom{n}{i}g_ih_j$.

这种卷积 (二项卷积) 表达的是**序列的合并/有序组的合并**.

DGF 的卷积

若三个 DGF 有形式为

$$F(z) = \sum_{i\geq 1} f_i \cdot \frac{1}{i^z}, G(z) = \sum_{i\geq 1} g_i \cdot \frac{1}{i^z}, H(z) = \sum_{i\geq 1} h_i \cdot \frac{1}{i^z},$$

且有 $F = G * H$, 那么 $f_n = \sum_{ij=n} g_i h_j = \sum_{d|n} g_d h_{n/d}$.

DGF 的卷积

若三个 DGF 有形式为

$$F(z)=\sum_{i\geq 1} f_i\cdot\frac{1}{i^z}, G(z)=\sum_{i\geq 1} g_i\cdot\frac{1}{i^z}, H(z)=\sum_{i\geq 1} h_i\cdot\frac{1}{i^z},$$

且有 $F=G*H$, 那么 $f_n=\sum_{ij=n} g_ih_j=\sum_{d|n} g_dh_{n/d}$.

这种卷积 (狄利克雷卷积) 表达的是数论函数之间的关系, 在数论中运用广泛.

二叉树的个数

用生成函数求解节点个数为 n 的二叉树个数.

二叉树的个数

用生成函数求解节点个数为 n 的二叉树个数.

首先分析**数列**, 设结点个数为 n 的二叉树个数为 a_n.
那么 $a_0 = 1$, 当 $n \geq 1$ 时可以使用二叉树的递归定义.

二叉树的个数

用生成函数求解节点个数为 n 的二叉树个数.

首先分析**数列**, 设结点个数为 n 的二叉树个数为 a_n.
那么 $a_0 = 1$, 当 $n \geq 1$ 时可以使用二叉树的递归定义.

需要 OGF, 设为 $F(z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$.

二叉树的个数

用生成函数求解节点个数为 n 的二叉树个数.

首先分析**数列**, 设结点个数为 n 的二叉树个数为 a_n.
那么 $a_0 = 1$, 当 $n \geq 1$ 时可以使用二叉树的递归定义.

需要 OGF, 设为 $F(z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$.

由上可知

$$F(z) - 1 = zF^2(z)$$

组合意义为, 任何结点数 ≥ 1 的二叉树 (即 $F(z) - 1$) 都可以由根节点 (z) 和左右子树 ($F^2(z)$) **拼接**构成.

二叉树的个数

用生成函数求解节点个数为 n 的二叉树个数.

首先分析**数列**, 设结点个数为 n 的二叉树个数为 a_n.
那么 $a_0 = 1$, 当 $n \geq 1$ 时可以使用二叉树的递归定义.

需要 OGF, 设为 $F(z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$.

由上可知

$$F(z) - 1 = zF^2(z)$$

组合意义为, 任何结点数 ≥ 1 的二叉树 (即 $F(z) - 1$) 都可以由根节点 (z) 和左右子树 ($F^2(z)$) **拼接**构成.

剩下的是 GF 运算的事了.

只有卷积太单调了

生成函数 (OGF, EGF) 的运算本质是**形式幂级数**的运算.

根据卷积的定义, 模仿我们熟悉的实分析的一些内容, 我们可以定义生成函数 F 的各种运算

$$1/F, \ln(F), \exp(F), \mathcal{E}(F), \cdots$$

只有卷积太单调了

生成函数 (OGF, EGF) 的运算本质是**形式幂级数**的运算.

根据卷积的定义, 模仿我们熟悉的实分析的一些内容, 我们可以定义生成函数 F 的各种运算

$$1/F, \ln(F), \exp(F), \mathcal{E}(F), \cdots$$

它们都有相应的组合意义!

涉及代数学的相关知识.

很多东西是推不出来的!

因为卷积的性质, 对于很难用数学方法得到形式化解的 GF, 可以用算法求它的前 n 项! 或者说, 求它前有限项构成的多项式.

很多东西是推不出来的!

因为卷积的性质, 对于很难用数学方法得到形式化解的 GF, 可以用算法求它的前 n 项! 或者说, 求它前有限项构成的多项式.

FFT, 牛顿迭代法, 拉格朗日定理...

极其复杂!

凭什么不用考虑敛散性?

形式幂级数本质: 构成一元多项式环, 基本运算**只有**加法和卷积. 这二者是可以严格定义的.

凭什么不用考虑敛散性?

形式幂级数本质：构成一元多项式环，基本运算**只有**加法和卷积.
这二者是可以严格定义的.

其它运算：是加法和卷积的复合运算!

凭什么不用考虑敛散性?

形式幂级数本质: 构成一元多项式环, 基本运算**只有**加法和卷积. 这二者是可以严格定义的.

其它运算: 是加法和卷积的复合运算!

从未定义过 “敛散性”, 那就当然不用考虑敛散性了!

凭什么不用考虑敛散性?

形式幂级数本质: 构成一元多项式环, 基本运算**只有**加法和卷积. 这二者是可以严格定义的.

其它运算: 是加法和卷积的复合运算!

从未定义过 "敛散性", 那就当然不用考虑敛散性了!

思考题

为什么形式幂级数的**卷积**是严格定义的?

谢谢大家!