门格尔定理的证明

问题求解（三）第 4 周 Open Topic

黄文睿　221180115

南京大学

主要内容

门格尔定理

门格尔定理 (顶点版本)

对于图 $G=\langle V,E\rangle$ 和两个不相邻的顶点 $u,v\in V$，使 u 和 v 不连通至少需要从 G 中删除的顶点数量（u-v 最小点割集大小）等于 G 中两两无公共内顶点的 u-v 路的数量。

门格尔定理 (边版本)

对于图 $G=\langle V,E\rangle$ 和两个顶点 $u,v\in V$，使 u 和 v 不连通至少需要从 G 中删除的边数量（u-v 最小边割集大小）等于 G 中两两无公共边的 u-v 路的数量。

主要内容

利用归纳法证明门格尔定理

在经典图论教材 A first course in graph theory [1] 中，提到了一种比较直观的证明方法。

[1] Gary Chartrand and Ping Zhang. A first course in graph theory. Courier Corporation, 2013

利用归纳法证明门格尔定理

在经典图论教材 A first course in graph theory [1]中，提到了一种比较直观的证明方法。

对 $m = \epsilon(G)$ 进行归纳。假设图 G 有大小为 k 的最小 u-v 点割集 S，显然有 u-v 不交路的数量 $\leq k$。只需证明其等于 k。

[1]Gary Chartrand and Ping Zhang. A first course in graph theory. Courier Corporation, 2013

利用归纳法证明门格尔定理

在经典图论教材 A first course in graph theory [1]中，提到了一种比较直观的证明方法。

对 $m = \epsilon(G)$ 进行归纳。假设图 G 有大小为 k 的最小 u-v 点割集 S，显然有 u-v 不交路的数量 $\leq k$。只需证明其等于 k。

- 当 $m = 0$ 时，对于空图显然成立。
- 如果对于 $\epsilon(G) \leq m - 1$ 的图都成立，则对于 G 满足 $\epsilon(G) = m$ 的图，只需证明上述命题。当 $k \leq 1$，结论显然成立，只考虑 $k \geq 2$。分为以下几种情况：

[1]Gary Chartrand and Ping Zhang. A first course in graph theory. Courier Corporation, 2013

Case 1

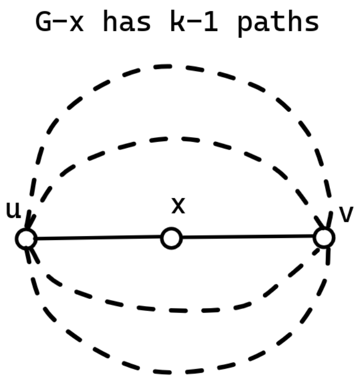

图: Case 2

Case 1

若存在 S 且存在 $x \in S$ 使得 x 与 u 和 v 均相邻，那么图 $G - x$ 有大小为 $k - 1$ 的点割集 $S \setminus \{x\}$，且 $\epsilon(G - x) < m$。由归纳假设，$G - x$ 有 $k - 1$ 条 u-v 不交路，则在 G 中，加上 $\langle u, x, v\rangle$，有 k 条 u-v 不交路。

Case 2

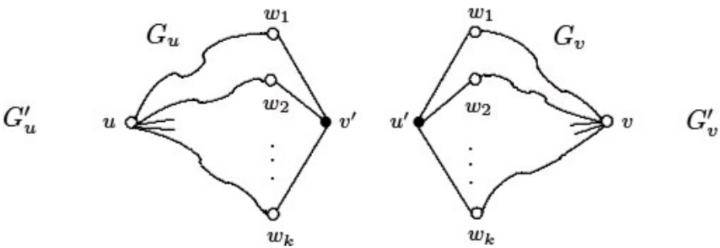

图: Case 1[2]

[2]Gary Chartrand and Ping Zhang. A first course in graph theory. Courier Corporation, 2013

Case 2

若存在 S，满足 S 中既存在和 u 不相邻的顶点 v'，也存在和 v 不相邻的顶点 u'，那么如图，可以简单地拆成两个图并运用归纳假设。

Case 3

则剩下的情况是，对于**所有**的 S，要么全部顶点只和 u 相邻不和 v 相邻，要么全部顶点只和 v 相邻不和 u 相邻。不妨设是第一种。

Case 3

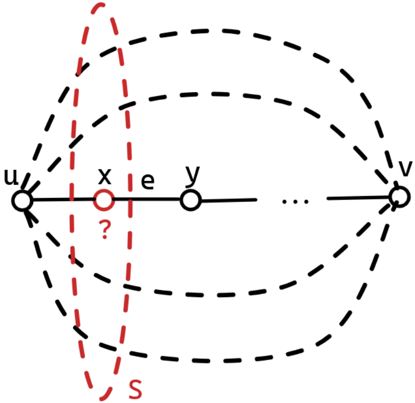

图: Case 3

Case 3

设 u 到 v 的最短路径是 $\langle u, x, y, \cdots, v\rangle$，记 $e = (x, y)$。设 $G' = G - e$ 的最小点割集 Z，显然 $k - 1 \leq |Z| \leq k$。只需证明 $|Z| = k$ 并利用归纳假设（因为 $\epsilon(G') < m$）即可。

用反证法，假设 $|Z| = k - 1$，则 $Z \cup \{x\}$ 和 $Z \cup \{y\}$ 均是 G 的两个最小分割集，于是均与 u 相邻，与最短路矛盾。故 $|Z| = k$，利用归纳假设，$G - e$ 有 k 条 u-v 不交路，从而 G 也有 k 条，证毕。

主要内容

证明边版本

如何建模？

- u 作为源点，v 作为汇点，把所有无向边当作两条方向相反的弧，容量为 1。
- 一条 u-v 路对应 1 流量，因为边的容量为 1，保证了边不重复。
- 最小割是显然的。

证明点版本

如何建模？

- u 和 v 仍然作为源汇点，把其他每个点 x 拆成入点 x_{in} 和出点 x_{out} 两个点。对于原图的有向边 (x,y)，在 x_{out} 和 y_{in} 间连有向边，容量为 ∞；在 x_{in} 和 x_{out} 之间连容量为 1 的边。u 则作为 u_{out}、v 作为 v_{in} 建图。
- 一条 u-v 路对应 1 流量，因为入点到出点的弧容量为 1，保证了点不重复。
- 最小割：只能在点的入点和出点之间割开，相当于把点割去。

证明点版本

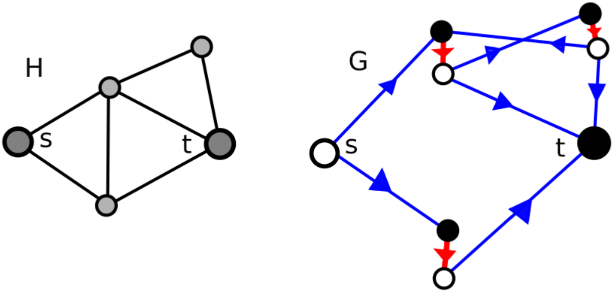

图: 点版本建模[3]

[3]Rahman, M. S., & Kaykobad, M. (2005). On Hamiltonian cycles and Hamiltonian paths. Information Processing Letters, 94(1), 37-41.

参考文献

- Gary Chartrand and Ping Zhang. A first course in graph theory.
  Courier Corporation, 2013

谢谢大家!