哈密尔顿图的充分且/或必要条件

问题求解（三）第 3 周 Open Topic

黄文睿　221180115

南京大学

主要内容

在 Anatoly D.Plotnikov 的一篇论文[1]中给出了判断一个图是否是哈密尔顿图的一个充要条件。他提出了利用图的独立集的性质来判断哈密尔顿图。

[1]Anatoly Plotnikov. One criterion of existence of a hamiltonian cycle. Reliable Computing, pages 199–202, 01 1998

Def 1.(k-连通图)

对于 $G=\langle V,E\rangle$，若 $|V|\geq k+1$ 且对任意 $V'\subseteq V$ 且 $|V'|\leq k-1$，$G-V'$ 仍连通，则称 G 是 k-连通图。

1. 1-连通图：即非平凡的连通图。
2. 2-连通图：不含割点的连通图。

Theorem 1.

图 G 是哈密尔顿图的必要条件是 G 是 2-连通图。

但这不是充要条件，比如 Θ 图。

Θ 图：两个度数至少为 3 的点，之间通过至少三条路径相连，每条路径长度至少为 2。若每条路径长度恰为 2，则称为简化 Θ 图。

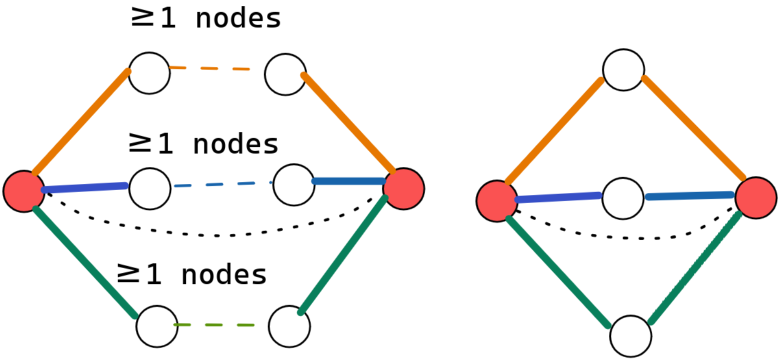
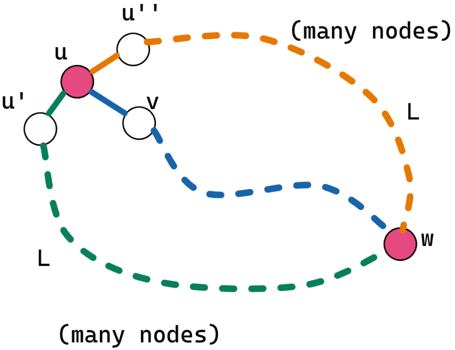


图: Θ 图和简化 Θ 图

Theorem 2.

一个 2-连通图是非哈密尔顿图的必要条件是有 Θ 图作为它的子图。



Theorem 2. 解释

设 G 是一个 2-连通图且不是哈密尔顿图，则 G 中最长圈 L 的长度小于 $v(G)$，由于 G 连通，故存在 $(u,v)\in E$ 满足 $u\in L$ 且 $v\in L$。设 u' 和 u'' 是 L 上与 u 相邻的两点，容易知道 u' 和 u'' 与 v 之间均没有边相邻（否则可以把 v 放进去获得一个更大的圈）。由于 G 双连通，删去 G 后 v 也应该与 L 上其他点连通，故存在 $w\in L$ 是 v 到 L 上某一条路径的第一个在 L 上的点，则如图，已然形成 Θ 图。

Theorem 3.

任何是 2-连通图的非哈密尔顿图都可以收缩成 Θ 图（进一步可以收缩为简化 Θ 图）

证明略，见论文[2]。

[2]Cornelis Hoede and Henk Jan Veldman. On characterization of hamiltonian graphs.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 25(1):47–53, 1978

Def 2.

图 G 的独立集是点集 $X \subseteq V$ 满足 $G[X]$ 是空图。称点集 $\mathcal{S}(X) \subseteq V$ 是独立集 X 的一个分割（seperating X），当且仅当 $\mathcal{S}(X) \cap X = \varnothing$ 且在 $G - \mathcal{S}(X)$ 中 X 中任意两点不连通。

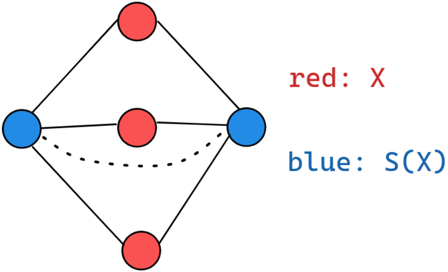
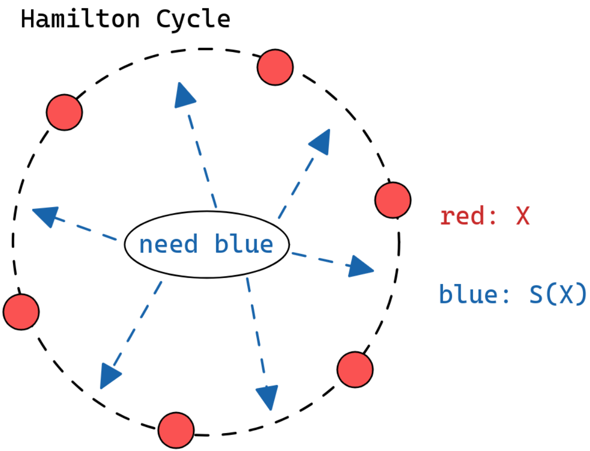


图: 独立集与分割

Theorem 4.

图 G 是哈密尔顿图的充要条件是对于 G 任意的独立集 X，对其任何一个分割 $\mathcal{S}(X)$ 都有 $|X| \leq |\mathcal{S}(X)|$。

必要性



必要性（图解）

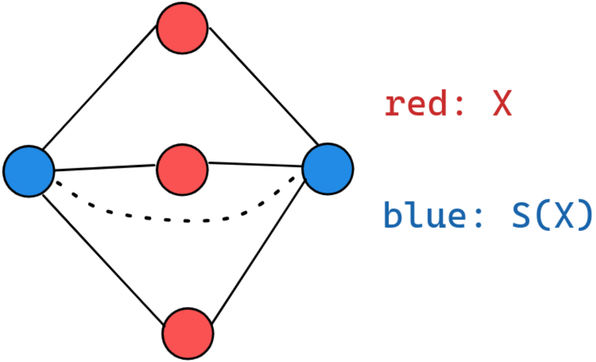
任取一个 G 的独立集 X，设它的最小分割是 $\hat{\mathcal{S}}(X)$。用反证法，设 $|X| > |\hat{\mathcal{S}}(X)|$。在哈密尔顿圈中看这些点，由于每个点都在圈上，故 X 均在圈上。为了把圈上相邻的 X 点分开，在每两个 X 点之间必须插入至少一个 $\hat{\mathcal{S}}(X)$ 点，故 $|\hat{\mathcal{S}}(X)|$ 至少需要 $\geq |X|$，与假设矛盾。必要性成立。

充分性

若对 G 的任意独立集 X 及其任何一个分割 $\mathcal{S}(X)$ 都有 $|X| \leq |\mathcal{S}(X)|$，假设 G 不是哈密尔顿图。分以下三种情况：

1. 若 X 不连通，则在两个连通分支中选择两个 X，而 $\mathcal{S}(X)$ 可以为空，则 $2 = |X| \leq |\mathcal{S}(X)| = 0$，不满足前提条件。
2. 若 X 连通但有割点 v，则在 $G - v$ 的两个连通分支中选择两个 X，选择 $\mathcal{S}(X) = \{v\}$，则 $2 = |X| \leq |\mathcal{S}(X)| = 1$，不满足前提条件。
3. 则 X 是 2-连通图且不是哈密尔顿图，则 X 必然可以归约到 Θ 图（进而可以归约到简化 Θ 图），而在简化 Θ 图中可以如图选择 $|X| = 3$ 但 $|\mathcal{S}(X)| = 2$，同样可以对应到到原图中，与假设矛盾。

充分性（图）



主要内容

在 M.Sohel Rahman 和 M.Kaykobad 的一篇论文[3]中，提到了如下结论：

Theorem 5.

若 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个 n 阶连通图，P 是图中的最长路，长度为 k，端点为 u 和 v。用 $\delta(u, v)$ 表示 u 和 v 之间的距离。则：

1. 若 $\delta(u, v) = 1$，则 P 是一条在哈密尔顿圈中的哈密尔顿路；
2. 若 $\delta(u, v) \geq 3$，则 $d_P(u) + d_P(v) \leq k - \delta(u, v) + 2$。[4]
3. 若 $\delta(u, v) = 2$，则要么 $d_P(u) + d_P(v) \leq k$，要么 P 是一条在哈密尔顿圈中的哈密尔顿路。

[3] M Sohel Rahman and Mohammad Kaykobad. On hamiltonian cycles and hamiltonian paths. Information Processing Letters, 94(1):37–41, 2005

[4] 用 $d_G(u)$ 表示在图 G 中 u 的度数。

Lemma 1.

若 P 被包含在某个圈 C 内，则 P 是一条哈密尔顿路，G 是哈密尔顿图。

Lemma 1. 证明

首先，易知 $V[P] = V[C]$，否则 P 显然可以变得更长。设 $P = \langle u = u_0, u_1, u_2, \cdots, u_k = v\rangle$，则 $C = \langle u = u_0, u_1, u_2, \cdots, u_k, u_0 = u\rangle$，假设 P 不为哈密尔顿路，则 $k < n-1$，由于 G 是连通图，存在 $(x, y) \in E$ 满足 $x \in V[P]$ 且 $y \in V[G-P]$，设 $x = u_i$，则有一条长度为 $k+1$ 的路径 $P' = \langle y, x = u_i, u_{i+1}, \cdots, u_k, u_0, \cdots, u_{i-1}\rangle$，矛盾。故 P 是哈密尔顿路，C 是哈密尔顿圈，G 是哈密尔顿图。

Theorem 5. 证明

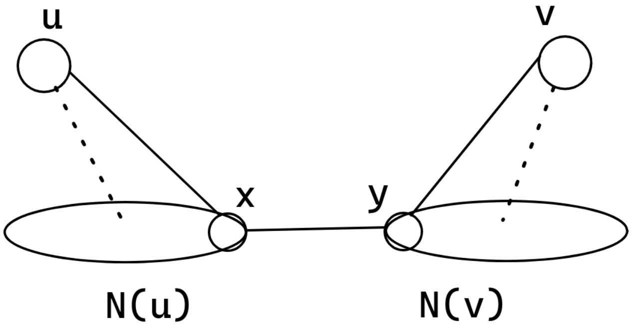
1. 当 $\delta(u,v)=1$，则 $C=P+(u,v)$ 是一个包含 P 的圈，由 **Lemma 1.** 得证。
2. 当 $\delta(u,v)\geq 3$ 时，设与 u 相邻的顶点集为 $N_P(u)$，与 v 相邻的顶点集为 $N_P(v)$，可知 $\forall x\in N_P(u), y\in N_P(v)$，满足 $\delta(x,y)\geq\delta(u,v)-2$。容易知道

$$|N_P(u)|+|N_P(v)|+\delta(x,y)\leq k,$$

故

$$d_P(u)+d_P(v)\leq k-\delta(u,v)+2.$$

Theorem 5. (2) 图



Theorem 5. 证明（续）

若 $\delta(u,v)=2$，且 $d_P(u)+d_P(v)\geq k+1=|V[P]|$，把 P 写成 $P=\langle v=w_1,w_2,\cdots,w_{|V[P]|-1},w_{|V[P]|}=u\rangle$。
若有两条交叉的边 (v,w_{i+1}) 和 (w_i,u)，这样可以构造出一个环 $C=\langle w_1,w_{i+1},w_{i+2},\cdots,w_{|V[P]-1|},w_{|V[P]|},w_i,w_{i-1},\cdots,w_2,w_1\rangle$，于是由引理 1 得证。
是否存在这样的 i 呢？设 $S=\{i:(v,w_{i+1})\in E\},T=\{i:(w_i,u)\in E\}$，可知

$$|S|=d_P(u),|T|=d_P(v),|S\cup T|\leq|V[P]|-1,$$

故

$$\begin{aligned}|S\cap T|=&|S|+|T|-|S\cup T|\\ \geq&d_P(u)+d_P(v)-(|V[P]|-1)\\ \geq&|V[P]|-(|V[P]|-1)\\ =&1\end{aligned}$$

Theorem 6.

若 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个 n 阶连通图，且对于所有不相邻的两点 $u, v \in V$，有 $d(u) + d(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$，则 G 有哈密尔顿路。

证明略。

References

1. Anatoly Plotnikov. One criterion of existence of a hamiltonian cycle.
Reliable Computing, pages 199–202, 01 1998
2. Cornelis Hoede and Henk Jan Veldman. On characterization of hamiltonian graphs.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 25(1):47–53, 1978
3. M Sohel Rahman and Mohammad Kaykobad. On hamiltonian cycles and hamiltonian paths.
Information Processing Letters, 94(1):37–41, 2005

谢谢大家!