# 双调欧几里得旅行商问题的动态规划解法

## 问题求解 Open Topic III

黄文睿　学号: 221180115

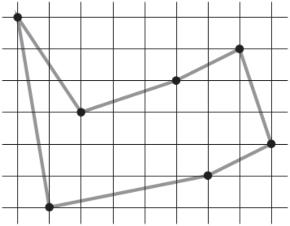
南京大学　2022 级计算机拔尖班

2023 年 5 月 19 日

# 问题引入

**双调欧几里得旅行商问题**

欧几里得平面上有 $n$ 个点，每个点的横坐标均不相同，从最左点沿某路径到达最右点，再从最右点沿某路径到最左点，使得除了初始点外，每个点均恰好被经过一次，求路径长度的最小值.



# 数学刻画

## 双调欧几里得旅行商问题 (转化)

形式化地，设每个点按横坐标从小到大排序后重编号为 $1$ 至 $n$. 将序列 $2..n$ 划分为两个单调递增的序列 (可能为空) $\{a_i\}, 1 \le i \le p$ 和 $\{b_i\}, 1 \le i \le q$, $p + q = n - 1$. 不妨设 $a_p = n$, 并另记 $a_0 = b_0 = 1$, 求划分方法使得

$$S = \sum_{i=0}^{p-1} d(a_i, a_{i+1}) + \sum_{i=0}^{q-1} d(b_i, b_{i+1}) + d(b_q, n)$$

最小，其中 $d(u, v)$ 表示编号为 $u$ 和 $v$ 的两点的欧几里得距离.

# 状态设计

设 $f[x,y](x>y\geq 1)$ 表示将序列 $2..x$ 划分成 $a_{1..p}$ 和 $b_{1..q}$ 时 $\sum_{i=0}^{p-1} d(a_i,a_{i+1})+\sum_{i=0}^{q-1} d(b_i,b_{i+1})$ 的最小值，满足 $a_p=x$ 且 $b_q=y$.

若 $y$ 等于 1 说明 $b$ 仅含 $b_0=1$.

# 状态设计

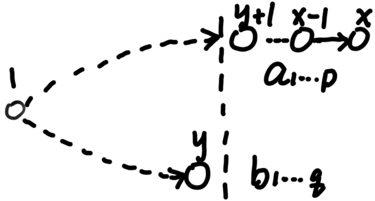
设 $f[x,y](x>y\geq 1)$ 表示将序列 $2..x$ 划分成 $a_{1..p}$ 和 $b_{1..q}$ 时 $\sum_{i=0}^{p-1} d(a_i,a_{i+1})+\sum_{i=0}^{q-1} d(b_i,b_{i+1})$ 的最小值，满足 $a_p=x$ 且 $b_q=y$.
若 $y$ 等于 1 说明 $b$ 仅含 $b_0=1$.

有边界条件为 $f[2,1]=d(1,2)$

# 转移方程 - Case 1

1. 当 $x-1>y\geq 1$ 时，这种情况下 $y+1..x$ 都会属于 $a_{1..p}$，那么去掉 $x$ 后，把 $x-1$ 当成最后的节点，会形成 $f[x-1,y]$ 的子问题. 转移方程为

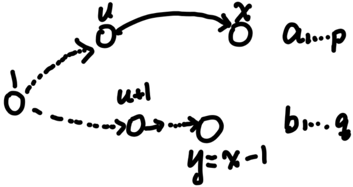
$$f[x,y]=f[x-1,y]+d(x-1,x).$$



# 转移方程 - Case 2

2. 当 $x-1=y\geq 2$ 时，这种情况下 $x$ 一定存在一个小于 $y$ 的前驱节点 $u$，那么 $u+1..x-1$ 都是属于 $b$ 的. 去掉 $x$ 后，把 $a$ 和 $b$ 调换一下，发现形成了 $f[x-1,u]$ 的子问题，转移方程为

$$f[x,x-1]=\min_{1\leq u<x-1}\{f[x-1,u]+d(u,x)\}.$$



# 完整的转移方程

$$
\begin{aligned}
f[2,1] &= d(2,1); && (1)\\
f[x,y] &= f[x-1,y] + d(x,x-1), \text{when } x-1 > y \geq 1; && (2)\\
f[x,x-1] &= \min_{1\leq u<x-1} \{f[x-1,u] + d(u,x)\}, \text{when } x \geq 3. && (3)
\end{aligned}
$$

# 统计最终答案

观察到 $f[n,u](1 \le u < n)$ 和 $S$ 仅差一项 $d(u,n)$, 于是

$$S = \min_{1\le u<n} \{f[n,u] + d(u,n)\}. \tag{4}$$

# 统计最终答案

观察到 $f[n,u](1 \leq u < n)$ 和 $S$ 仅差一项 $d(u,n)$, 于是

$$S = \min_{1 \leq u < n} \{f[n,u] + d(u,n)\}. \tag{4}$$

整个算法的时间复杂度 $O(n^2)$, 空间复杂度 $O(n^2)$.

# 时间复杂度证明

共有 $\sum_{1\leq j<i\leq n} 1 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 种状态，子问题图的点数

$$|V| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

对于 $(x,y), 1 \leq y \leq x-2$ 的状态，在子问题图中仅有指向 $(x-1,y)$ 的一条出边；对于 $(x,x-1), 3 \leq x \leq n$，有指向 $(x-1,u), 1 \leq u \leq x-2$ 共 $x-2$ 条出边．故总边数为

$$|E| = \sum_{x=3}^{n}\sum_{y=1}^{x-2} 1 + \sum_{x=3}^{n}(x-2) = (n-1)(n-2).$$

故时间复杂度为 $O(|V|+|E|) = O(n^2)$.

# 优化状态数

从时间复杂度分析中发现:

- 很多状态只有一条出边.
- 可以尝试用数学方法缩减状态数量，压缩子问题图.

# 优化状态数

对于 (2), 进行如下推导:

$$
\begin{aligned}
f[x,y] &= f[x-1,y] + d(x,x-1) \\
&= f[x-2,y] + d(x-1,x-2) + d(x,x-1) \\
&= \cdots \\
&= f[y+1,y] + d(y+2,y+1) + \cdots + d(x,x-1) \\
&= f[y+1,y] + D(x) - D(y+1), \text{when } 1 \le y \le x-2.
\end{aligned}
$$

其中使用了前缀和, $D(x) = \sum_{i=2}^{x} d(i,i-1)$.

# 优化状态数

代入 (3)，有

$$
\begin{aligned}
f[x, x-1] &= \min_{1 \le u < x-1} \{f[x-1, u] + d(u, x)\} \\
&= \min\{f[x-1, x-2], \\
&\quad \min_{1 \le u < x-2} \{f[u+1, u] + D(x-1) - D(u+1) + d(u, x)\}\} \\
&= \min\{f[x-1, x-2], \\
&\quad \min_{2 \le u \le x-2} \{f[u, u-1] + D(x-1) - D(u) + d(u-1, x)\}\} \\
&= \min_{2 \le u \le x-1} \{f[u, u-1] + D(x-1) - D(u) + d(u-1, x)\}.
\end{aligned}
$$

# 优化状态数

同理, 代入 (4), 有

$$S = \min_{2 \le u \le n} \{ f[u, u-1] + D(n) - D(u) + d(u-1, n) \}.$$

# 优化状态数

同理，代入 (4)，有

$$S = \min_{2 \le u \le n} \{f[u, u-1] + D(n) - D(u) + d(u-1, n)\}.$$

这时，已经把大部分的状态缩减了，所有式子中仅出现了 $f[x, x-1]$ 的状态.

# 优化状态数

作代换 $g[x]=f[x,x-1], x\geq 2$，得到如下新的转移方程

$$g[2]=d(2,1); \tag{5}$$

$$g[x]=\min_{2\leq u\leq x-1}\{g[u]+D(x-1)-D(u)+d(u-1,x)\}. \tag{6}$$

第二个式子对 $x\geq 3$ 成立. 其中 $D(x)=\sum_{i=2}^{x} d(i,i-1)$. 且

$$S=\min_{2\leq u\leq n}\{g[u]+D(n)-D(u)+d(u-1,n)\}. \tag{7}$$

# 优化状态数

作代换 $g[x] = f[x, x-1], x \geq 2$, 得到如下新的转移方程

$$g[2] = d(2,1); \tag{5}$$
$$g[x] = \min_{2 \leq u \leq x-1} \{g[u] + D(x-1) - D(u) + d(u-1, x)\}. \tag{6}$$

第二个式子对 $x \geq 3$ 成立. 其中 $D(x) = \sum_{i=2}^{x} d(i, i-1)$. 且

$$S = \min_{2 \leq u \leq n} \{g[u] + D(n) - D(u) + d(u-1, n)\}. \tag{7}$$

状态数只有 $O(n)$ 个! 时间复杂度 $O(n^2)$, 空间复杂度 $O(n)$.

# 再优化?

- 空间复杂度减至 $O(n)$ 为最优.
- 时间复杂度仍为 $O(n^2)$, 是否可以进一步优化?

# 再优化?

- 空间复杂度减至 $O(n)$ 为最优.
- 时间复杂度仍为 $O(n^2)$, 是否可以进一步优化?

分析瓶颈, 在于 (6) 的转移需要 $\Theta(x)$ 时间进行.

# 再优化?

- 空间复杂度减至 $O(n)$ 为最优.
- 时间复杂度仍为 $O(n^2)$, 是否可以进一步优化?

分析瓶颈, 在于 (6) 的转移需要 $\Theta(x)$ 时间进行.

如果可以运用数据结构快速转移, 或者转移方程有决策单调性等性质, 那么可以优化转移复杂度.

# 变种问题

遗憾的是，我没有寻找到合适的数据结构，或者决策单调性.

# 变种问题

遗憾的是，我没有寻找到合适的数据结构，或者决策单调性.

但猜想存在更优的确定性做法，例如使用高阶的数据结构等. 这是因为它的一个变种问题有极其优秀的解法.

**“双调曼哈顿旅行商问题”**

与原问题非常相似，区别仅在将距离的定义改为曼哈顿距离，即

$$d(u,v) = |X_u - X_v| + |Y_u - Y_v|.$$

# 解决变种问题

容易发现，动态规划解法没有任何变化．在曼哈顿距离的情况下，容易把 (6) 进一步写为

$$
\begin{aligned}
g[x] &= D(x-1) + \min_{2\le u\le x-1}\{g[u] - D(u) + |X_x - X_{u-1}| + |Y_x - Y_{u-1}|\} \\
&= D(x-1) + X_x + \min_{2\le u\le x-1}\{g[u] - D(u) - X_{u-1} + |Y_x - Y_{u-1}|\}
\end{aligned}
$$

分类讨论 $Y_x$ 和 $Y_{u-1}$ 的大小关系．

# 解决变种问题

对于 $Y_{u-1} \le Y_x$ 的，有

$$s_1 = D(x-1) + X_x + Y_x + \min_{2 \le u \le x-1, Y_{u-1} \le Y_x} \{g[u] - D(u) - X_{u-1} - Y_{u-1}\}$$

同理，对于 $Y_{u-1} > Y_x$ 的，有

$$s_2 = D(x-1) + X_x - Y_x + \min_{2 \le u \le x-1, Y_{u-1} > Y_x} \{g[u] - D(u) - X_{u-1} + Y_{u-1}\}$$

则 $g[x] = \min\{s_1, s_2\}$. 可以使用两棵平衡树以 $Y_i$ 为 $key$ 维护 min 后的值，从而在 $O(\log n)$ 时间内得到最小值的决策点并转移.

# 解决变种问题

对于 $Y_{u-1} \le Y_x$ 的，有

$$s_1 = D(x-1) + X_x + Y_x + \min_{2 \le u \le x-1, Y_{u-1} \le Y_x} \{g[u] - D(u) - X_{u-1} - Y_{u-1}\}$$

同理，对于 $Y_{u-1} > Y_x$ 的，有

$$s_2 = D(x-1) + X_x - Y_x + \min_{2 \le u \le x-1, Y_{u-1} > Y_x} \{g[u] - D(u) - X_{u-1} + Y_{u-1}\}$$

则 $g[x] = \min\{s_1, s_2\}$. 可以使用两棵平衡树以 $Y_i$ 为 $key$ 维护 min 后的值，从而在 $O(\log n)$ 时间内得到最小值的决策点并转移.

故总时间复杂度为 $O(n \log n)$，空间复杂度仍为 $O(n)$.

# 总结

以双调欧几里得旅行商问题为例，讲解了其中的动态规划的设计方法，并进行优化，最后得到了 $O(n^2)$ 时间复杂度，$O(n)$ 空间复杂度的算法. 并且对变种问题展开讨论，得到了 $O(n\log n)$ 时间复杂度的算法.

# 总结

以双调欧几里得旅行商问题为例，讲解了其中的动态规划的设计方法，并进行优化，最后得到了 $O(n^2)$ 时间复杂度，$O(n)$ 空间复杂度的算法. 并且对变种问题展开讨论，得到了 $O(n\log n)$ 时间复杂度的算法.

**Bonus**

如何优化原问题的动态规划算法的时间复杂度？比如使用较为高阶的数据结构？

# 谢谢大家!