定理1：确界原理：非空有界数集必有确界.
定理2：单调有界原理：单调有界数列必收敛.

$1° \Rightarrow 2°$ 证明：设$\{x_n\}$为一单调上升的数列，$\{x_n\} \subseteq [a,b]$.
构造集合$A=\{x \mid x=x_i,\ i=1,2,3,\cdots\}$，则$A \subseteq [a,b]$，且A非空.
由确界原理，A存在上确界c，c满足：
① $\forall x \in A,\quad x \leq c$ ；② $\forall \varepsilon>0,\ \exists x_0 \in A,\quad x_0 > c-\varepsilon$.
即 ① $\forall x_i \in \{x_n\},\quad x_i \leq c$；② $\forall \varepsilon>0,\ \exists N \in N_+,\quad x_N > c-\varepsilon$.
故$0 \geq x_N - c > -\varepsilon$. 又由$\{x_n\}$的单增性，当$n>N$时，有

$$0 \geq x_n - c \geq x_N - c > -\varepsilon$$

即 $|x_n - c| < \varepsilon$.

综上，$\forall \varepsilon>0,\ \exists N \in N_+$，当$n>N$时，$|x_n-c|<\varepsilon$. 即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. #

$2° \Rightarrow 1°$ 证明：（方法一）. 设$A \subseteq [a,b]$为非空数集，以上确界为例：
① $\exists x_0 \in A,\ \forall x \in A,\ x \leq x_0$ 则$\forall \varepsilon>0$，取$x=x_0$，$x_0 > x_0-\varepsilon$.
故x_0为A的上确界.
② 1) $\forall \varepsilon>0,\ (b-\varepsilon, b] \cap A \neq \phi$ 取$x' \in (b-\varepsilon, b] \cap A$，$x' > b-\varepsilon$.
故b为A的上确界.
2) $\exists \varepsilon_0>0,\ (b-\varepsilon_0, b] \cap A = \phi$. 记$b_1=b$.
构造数列$\{C_n^1\}$，$C_n^1=\frac{b-a}{2^{n-1}}$. 则$\{C_n^1\}$单调下降. $C_n^1 \to 0\ (n\to\infty)$.
$C_1^1=b-a$，$b-C_1^1=a$，$b-C_n^1 \to b$. 因此$\exists N \in N_+$，$C_N^1<\varepsilon_0$. 因此，
存在最大的$N_1 \in N_+$，$(b-C_{N_1}^1, b] \cap A \neq \phi$. 故$(b-C_{N_1+1}^1, b] \cap A = \phi$.
记$b_2 = b_1 - C_{N_1+1}^1$，则b_2为A的上界.
i) $\forall \varepsilon>0,\ (b_2-\varepsilon, b_2] \cap A \neq \phi$ 取$x' \in (b_2-\varepsilon, b_2] \cap A$，$x' > b_2-\varepsilon$.
故b_2为A的上确界
ii) $\exists \varepsilon_0>0,\ (b_2-\varepsilon_0, b_2] \cap A = \phi$ 类似的，得到b_3.
… 反复进行下去. 若找到$k \in N_+$，b_k满足：$\forall \varepsilon>0,\ (b_k-\varepsilon, b_k] \cap A \neq \phi$. 则$b_k$为A的上确界，成，停.
否则，得一单调下降无穷序列$\{b_n\}$，$b_n \in [a,b]$. 由单调有界原理，$b_n \to c\ (n\to\infty)$. 由于$\forall x \in A$，$x \leq b_n$ 两边对n取极限，$x \leq c$.
即c为上界. 若c不为上确界，即$\exists \varepsilon_0>0,\ (c-\varepsilon_0, c] \cap A = \phi$.
由于$b_n \to c$，$b_n > c$，取$\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}$，$\exists N \in N_+$，$0<b_N-c<\frac{\varepsilon_0}{2}$，$0<b_{N+1}-c<\frac{\varepsilon_0}{2}$.
$b_{N+1}<b_N$ 故$0<b_N-b_{N+1}<\frac{\varepsilon_0}{2}$. 而$b_{N+1}=b_N-C_{\bar{N}}^N$ 故$C_{\bar{N}}^N=\frac{b_N-a}{2^{\bar{N}-1}}<\frac{\varepsilon_0}{2}$.
由于$(b_N-C_{\bar{N}-1}^N, b_N] \cap A \neq \phi$. 而$b_N - C_{\bar{N}-1}^N > c-\varepsilon_0$

因此 $(b_N-C_{N-1}^{N},c]\cap A=\phi$ 又由 c 为 A 的上界，故 $(c,b_N]\cap A=\phi$.
故 $(b_N-C_{N-1}^{N},b_N]\cap A=\phi$ 矛盾 故 c 为上确界 #.

证明：(方法二). 设 $A\subseteq[a,b]$ 为非空数集，以上确界为例：

① $\exists x_0\in A$, $\forall x\in A$, $x\leqslant x_0$. ② $\forall\varepsilon>0$, 取 $x=x_0$, $x_0>x_0-\varepsilon$.
则 x_0 为 A 的上确界.

② 记 $x'\in A$, $c\geqslant b$. 则 $[x',c]\cap A$ 为无限集（若不然，记最大者为 $\tilde{x}$, $\tilde{x}$ 为上确界）. 记 $x_1=\frac{x'+c}{2}$. $[x',x_1]$ 与 $[x_1,c]$ 至少有1包含 A 的无限项，若 $[x_1,c]\cap A$ 为无限集，记 $x_1=b_1$, $c=C_1$. 否则，记 $x'=b_1$, $x_1=C_1$.
此时，$[x_1,c]\cap A=\phi$（若不然，$[x_1,c]\cap A$ 为有限项，记最大者为 $\tilde{x}$, $\tilde{x}$ 为上确界）. 因此 C_1 为 A 的上界. 记 $x_2=\frac{b_1+C_1}{2}$ 则 $[b_1,x_2]$ 与 $[x_2,C_1]$ 至少有1包含 A 的无限项，若 $[x_2,C_1]\cap A$ 为无限集，记 $x_2=b_2$, $C_1=C_2$. 否则记 $b_1=b_2$, $x_2=C_2$. 类似的，C_2 为 A 的上界，$C_2\leqslant C_1$.

… 反复进行下去，得一单调减少数列 $\{C_n\}$, $C_n\in[x',c]$ 由单调有界原理，$C_n\to\alpha$ $(n\to\infty)$. 且 C_n 为 A 的上界. $\forall x\in A$, $x\leqslant C_n$
两边对 n 取极限，得 $x\leqslant\alpha$ 即 α 为 A 的上界.

另一方面，$C_n-b_n=\frac{C_1-b_1}{2^{n-1}}\to0$ $(n\to\infty)$. 数列 $\{b_n\}\in[x',c]$. 且单调上升. 类似的，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，故 $b_n\to\alpha$ $(n\to\infty)$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N_+$, $b_N>\alpha-\varepsilon$., $[b_N,C_N]\cap A\neq\phi$ 故 $(\alpha-\varepsilon,C_N]\cap A\neq\phi$ 记 $x'\in(\alpha-\varepsilon,C_N]\cap A$. $x'>\alpha-\varepsilon$. 故 α 为 A 上确界 #.

定理1：确界原理：非空有界数集必有确界.
定理3：闭区间套定理：设$\{[a_i,b_i]\,|\,i=1,2,3,\cdots\}$为一无穷闭区间集，满足：

(1) $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在，且$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$是$[a_i,b_i]$ $(i=1,2,\cdots)$的唯一公共点.

$1^\circ\Rightarrow3^\circ$ 证明：设$\{[a_i,b_i]\,|\,i=1,2,3\cdots\}$为无穷闭区间集，且有$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$；$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

构造集合$A=\{x\,|\,x=a_i,\ i=1,2,3\cdots\}$，由于$a_n<b_1$，$\{a_n\}$单调上升，故$a_n\geq a_1$

因此A为非空有界数集，由确界原理，A存在上确界α，满足：

$\forall a_i\in\{a_n\}$，$a_i\leqslant C$ 且$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，$a_N>\alpha-\varepsilon$.

由$\{a_n\}$单调上升性，当$n>N$时，$a_n\geq a_N>\alpha-\varepsilon$，故$|a_n-\alpha|<\varepsilon$.

即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$. 同理，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}[a_n-(a_n-b_n)]=\alpha$ 故$\xi=\alpha$.

以下证明ξ是$[a_i,b_i]$ $(i=1,2,\cdots)$的唯一公共点：

由$\{a_n\}$单调上升，$\{b_n\}$单调下降，$\xi\geq a_n$且$\xi\leqslant b_n$，因此ξ为公共点.

设β也为其公共点，$\beta\neq\xi$，则记$l=|\beta-\xi|>0$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ ~~则~~ 取$\varepsilon=l$，$\exists N\in N_+$，当$n>N$时 $|b_n-a_n|<l$.

因此$[a_n,b_n]$不同时存在ξ,β两点，又由ξ在$[a_n,b_n]$内，

故$\beta\notin[a_n,b_n]$矛盾. #.

$3^\circ\Rightarrow1^\circ$ 证明：设$A\subseteq[a,b]$为一非空数集，以上确界为例：

设$x'\in A$. ~~$c\geq b$~~

① ~~则~~ $\exists x_0\in A$，$\forall x\in A$，$x\leqslant x_0$，则$\forall\varepsilon>0$，取$x=x_0$，$x_0>x_0-\varepsilon$.

故x_0为A的上确界

② $[x',b]\cap A$为无限集（若不然，取其中最大者，便为上确界）.

令$x_1=\dfrac{x'+b}{2}$ 则$[x',x_1]$与$[x_1,b]$至少有1含有A的无限项，若$[x_1,b]$便是，令$b_1=x_1$，$c_1=b$. 否则，令$b_1=x'$，$c_1=x_1$. 此时，$[x_1,b]\cap A=\phi$.

（若不然，$[x_1,b]\cap A$为有限集，其最大者便为确界）. 故c_1为A的上界.

令$x_2=\dfrac{b_1+c_1}{2}$ 则$[b_1,x_2]$与$[x_2,c_1]$至少有1含有A的无限项，若$[x_2,c_1]$便是，令$b_2=x_2$，$c_2=c_1$. 否则，令$b_2=b_1$，$c_2=x_2$. 类似，c_2为A的上界

… 反复进行下去，得一无穷区间序列 $[b_i, c_i]$，满足：

$[b_1, c_1] \supseteq [b_2, c_2] \supseteq [b_3, c_3] \supseteq \cdots \supseteq [b_n, c_n] \supseteq \cdots$

$c_n - b_n = \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}}$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - b_n) = 0$. c_n 为 A 上界，$[b_n, c_n] \cap A$ 无限：

由区间套定理，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \xi$. 因为 $\forall x \in A$, $x \le c_n$.

两边对 n 取极限，得 $x \le \xi$. 故 ξ 为 A 的上界.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in N_+$, 当 $n > N$ 时 $\xi - b_n < \varepsilon$. 取 $x' \in [b_n, \xi] \cap A$.

则 $x' > \xi - \varepsilon$. 故 ξ 为 A 的上确界 #.

定理1：确界原理：非空有界数集必有确界.
定理4：聚点原理：有界无限集必有聚点.

$1^\circ \Rightarrow 4^\circ$ 证明：设A为一有界无限集. 由确界原理，A存在上下确界. 分别记为 ~~a, b~~ b, a. 即 $[a,b] \supseteq A$.

设 $x_1 = \frac{a+b}{2}$ 则 $[a, x_1]$ 与 $[\cancel{b}x_1, b]$ 至少有1含有A的无限项，取1个，记为 $[a_1, b_1]$. 令 $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ 则 $[a_1, x_2]$ 与 $[x_2, b_1]$ 至少有1含有A的无限项. 取1个，记为 $[a_2, b_1]$

… 反复进行下去，得单调上升数列 $\{a_n\}$ 与单调下降数列 $\{b_n\}$.

令集合 $T = \{x \mid x = a_i, i = 1, 2, \cdots\}$，则 $\overset{T}{\cancel{A}} \subseteq [a,b]$ 且 $\overset{T}{\cancel{A}}$ 非空. 由确界原理，T存在上确界 α 满足：$\forall a_n, a_n \leq \alpha$ 且 $\forall \varepsilon > 0, \exists a_N, a_N > \alpha - \varepsilon$.

又由 $\{a_n\}$ 的单调上升性 $a_n \geq a_N > \alpha - \varepsilon$ 即 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

而 $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0 \ (n \to \infty)$. 且 $[a_n, b_n] \cap A$ 为无限集.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+$, 当 $n > N$ 时 $|b_n - \overset{\alpha}{\cancel{a_n}}| < \varepsilon$. ~~即 $b_n < a_n + \varepsilon$~~. 取 $x' \in [a_n, b_n] \cap A$

$x' > \alpha - \varepsilon$. 故 α 是A的聚点.

$4^\circ \Rightarrow 1^\circ$ 证明：设 $A \subseteq [a,b]$ 为一非空数集. 以上确界为例：

① $\exists x_0 \in A, \forall x \in A, x \leq x_0$. 则 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $x = x_0$, $x_0 > x_0 - \varepsilon$.

故 x_0 为A的上确界.

② 记 $x' \in A$. 则 $[x', b] \cap A$ 为无限集（若不然，取最大者便为上确界）. 令 $x_1 = \frac{x'+b}{2}$ 则 $[x', x_1]$ 与 $[x_1, b]$ 至少有1含有A的无限项. 若 $[x_1, b]$ 便是，记 $a_1 = x_1, b_1 = b$. 否则，记 $a_1 = x', b_1 = x_1$. 此时，$[x_1, b] \cap A = \phi$. (若不然，$[x_1, b] \cap A$ 为有限集，取最大值便为上确界). 因此，b_1 为A的上界. 令 $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ 则 $[a_1, x_2]$ 与 $[x_2, b_1]$ 至少有1含有A的无限项，若 $[x_2, b_1]$ 便是，记 $a_2 = x_2, b_2 = b_1$，否则记 $a_2 = a_1, b_2 = x_2$. 类似的，b_2 为A的上界.

… 反复进行下去，则区间 $[a_n, b_n] \cap A$ 为无限集. ~~存在聚点 M_1. 事实上，$[a_n, b_n]$ 存在公共聚点 M_0 若不然，$\forall M$,~~ 当 $n > N$ 时 $a_n = \alpha$.

记 $T = \{x \mid x = a_i, i = 1, 2, \cdots\}$. 若T为有限集，则 $\exists N \in N_+$, 则 $\forall a_n, a_n \leq \overset{\alpha}{\cancel{x}}$. 否.

否则 T存在聚点 α. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_N, |a_N - \alpha| < \varepsilon$.

则，记 $a_t > \cancel{x}\alpha$. 取 $\varepsilon = a_t - \alpha$. $O(\alpha, \varepsilon) \cap T$ 为有限集 矛盾.

故 $\forall n > N, |a_n - \alpha| < \varepsilon$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \varepsilon$.

则 α 为 A 的聚点. 若不然, $\exists \varepsilon_0>0$ $O(\alpha,\varepsilon_0)\cap A=\phi$.

$\exists N\in N_+$, $b_N-\alpha<\varepsilon_0$, $\alpha-a_N<\varepsilon_0$ 故 $[a_N,b_N]\cap A=\phi$ 矛盾.

而 $\forall x\in A$. $x\leqslant b_n$ 两边取极限 $x\leqslant\alpha$ 因此 α 为上界.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists x'\in(\alpha-\varepsilon,\alpha]\cap A$, $x'>\alpha-\varepsilon$ 故 α 为上确界.

定理1：确界原理：非空有界数集必有确界.

定理5：柯西收敛准则：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in N_+, \forall m,n>N,$

$|x_m-x_n|<\varepsilon. \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in N_+,$ 当 $n>N$ 时 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 对 $\forall p\geq 1$ 成立

$1°\Rightarrow 5°$ 证明：$\Rightarrow$ 设 $x_n\to a\ (n\to\infty)$.

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in N_+$，取 $n>N$ $|x_n-a|<\varepsilon$. 取 $m>N$, $|x_m-a|<\varepsilon$.

则 $|x_n-x_m|<2\varepsilon$. 这个方向是显然的.

$\Leftarrow$ 由于 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

取 $n=N+1$, $|x_{N+1+p}-x_{N+1}|<\varepsilon$ 对 $\forall p\in N_+$ 成立. 故 $\{x_n\}$ 在 $n\geq N+1$ 时有界.

而 $x_1, x_2\cdots x_N$ 为有限项 因此，数列 $\{x_n\}$ 有界.

构造 $A=\{x\mid x=x_i, i=1,2,3,\cdots\}$ A为一非空有界数集. ~~$A\subseteq[a,b]$~~.

①若A为有限集. 则 $\exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时 $x_n\equiv C$. 事实上，若 $\forall N\in N_+$,

当 $n>N$ 时 $x_n\not\equiv C$ 而 x_n 的值为有限项. 记为 $r_1, r_2\cdots r_i$. 令 $\varepsilon_0=$

$\min\{|r_1-r_2|, |r_1-r_3|\cdots |r_{i-1}-r_i|\}$. 对于 $\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}$ $\forall N\in N_+$ 当 $n>N$ 时. $\exists p_0\in N_+$.

$|x_n-x_{n+p_0}|>\varepsilon$. 矛盾. 此时 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=C$.

②若A为无限集. 记A的上下确界为 b, a. 令 $x_1=\frac{a+b}{2}$. 则 $[a,x_1]$ 与

$[x_1,b]$ 至少有1含有A的无限项，记为 $[a_1,b_1]$ 令 $x_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 则 $[a_1,x_2]$

与 $[x_2,b_1]$ 至少有1含有A的无限项. 记为 $[a_2,b_2]$. 取 $x_{k_1}\in[a_1,b_1]$,

$x_{k_2}\in[a_2,b_2]$. 且 $k_2>k_1$

… 反复进行下去，得 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{nk}\}$. 以及无穷区间序列 $[a_i,b_i]$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=0$. 构造 $T=\{x\mid x=a_i, i=1,2,\cdots\}$. 则T为非空有界

数集. 故T存在上确界 α. 满足 $\forall a_i, a_i\leq\alpha$. ; $\forall\varepsilon>0, \exists a_N, a_N>\alpha-\varepsilon$.

由 $\{a_n\}$ 的单调上升性，当 $n>N$ 时 $a_n\geq a_N>\alpha-\varepsilon$. 故 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha$. 而 $a_n\leq x_{kn}\leq b_n$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{kn}=\alpha$.

即 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in N_+$. 当 $n>N$ 时 $|x_{kN}-\alpha|<\varepsilon$. 而 ~~$\exists N_1\in N_+$~~ 当 $n>k_{N_1}$ 时

$|x_{kN_1+p}-x_{kN_1}|<\varepsilon$. 即 $\exists\tilde{N}=\max\{N, N_1\}$. 当 $n>\tilde{N}$ 时 $|x_n-\alpha|<\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$5^\circ \Rightarrow 1^\circ$ 证明：设 A 为一非空有界数集，b 为 A 的一个上界，

以上确界为例：

① $\exists x_0 \in A$，$\forall x \in A$，$x \leq x_0$ 则 $\forall \varepsilon > 0$，取 $x = x_0$，$x_0 > x_0 - \varepsilon$.

故 x_0 为 A 的上确界.

② 取 $x_1 \in A$ 则 $[x_1, b] \cap A$ 为无限集. 若不然，记最大者为 $\tilde{x}$，$\tilde{x}$ 为 A 的上确界. 令 $x_2 = \frac{x_1+b}{2}$ 若 $[x_2, b] \cap A = \phi$ 记 $[c_1, d_1]$ 为 $[x_1, x_2]$ 否则，记 $[c_1, d_1]$ 为 $[x_2, b]$. 则有 ① $[c_1, d_1] \cap A$ 为无限集 ② d_1 为 A 上界.

事实上，若 $[x_2, b] \cap A = \phi$ 则 $[x_1, b] \cap A = [x_1, x_2] \cap A$ 故 $[c_1, d_1] \cap A$ 为无限集，$\nexists x \in A$，$x \geq x_2$，故 $d_1 = x_2$ 为 A 上界；

若 $[x_2, b] \cap A \neq \phi$ 则 $[x_2, b] \cap A$ 为无限集，否则，记最大者为 $\tilde{x}$，$\tilde{x}$ 为 A 上确界. $b = d_1$ 为 A 上界显然.

… 反复进行下去 得数列 $\{x_n\}$ $\{d_n\}$.

对于 $\{x_n\}$，$x_n = \frac{c_{n-2} + d_{n-2}}{2}$ $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{\ln \frac{8(d_1 - c_1)}{\varepsilon}}{\ln 2} \right] + 1$，当 $n > N$ 时

$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$ 对 $\forall p \geq 1$ 成立

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛于 c.

对于 $\{d_n\}$，d_n 均为 A 的上界.

① 若 $\exists x_0 \in A$，$x_0 > c$. 则 $\exists N_1$ 当 $n > N_1$ 时 $x_n < x_0$. 由于 $x_n \in [c_{n-1}, d_{n-1}]$

$|d_{n-1} - x_n| = \frac{1}{2} |c_{n-1} - d_{n-1}| = \frac{d_1 - c_1}{2^n}$ 当 n 充分大时 $|d_{n-1} - x_n| < x_0 - c$

则 $\exists d_{n_0}$，$d_{n_0} < x_0$ 矛盾

② 若 $\exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall x \in A$，$x \leq c - \varepsilon_0$ 又由 $d_n - c_n \to 0$ $\exists N \in N_+$ 当 $n > N$ 时，

$[c_n, d_n] \cap A = \phi$ 矛盾

故对 c，$\forall x \in A$，$x \leq c$ 且 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x' \in A$，$x' > c - \varepsilon_0$

故 c 为 A 的上确界.

定理1：确界原理：非空有界数集必有确界

定理6：有限覆盖原理：设Σ是闭区间$[a,b]$的一个开覆盖，则Σ中必含有$[a,b]$的一个有限子覆盖，即$\exists \Delta x_1, \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$，$\bigcup_{i=1}^{n} \Delta x_i \supseteq [a,b]$。

$1° \Rightarrow 6°$ 证明：假设$[a,b]$无法被Σ有限覆盖。记$x_1=\frac{a+b}{2}$，则$[a,x_1]$与$[x_1,b]$至少有1无法被Σ有限覆盖，记为$[a_1,b_1]$。令$x_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，则$[a_1,x_2]$与$[x_2,b_1]$至少有1无法被Σ有限覆盖，记为$[a_2,b_2]$。

…反复进行下去，得无法被Σ有限覆盖的区间列$[a_i,b_i]$。

记$A=\{x \mid x=a_i, i=1,2,3\cdots\}$。$A\subseteq[a,b]$ 由确界原理，A存在上确界c。

$\forall a_i$，$a_i \leqslant c$ 且$\forall \varepsilon>0$，$\exists a_N$，$a_N>c-\varepsilon$。又由$\{a_n\}$单调上升。

$$a_n \geqslant a_N > c-\varepsilon \quad \text{即} \ |a_n-c|<\varepsilon. \quad \text{故} \lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

而$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$ 故$\lim_{n\to\infty} b_n = c$。

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in N_+,\ \text{当} n>N \text{时}\ O(c,\varepsilon)\supseteq[a_n,b_n]$$

因此，c的任意邻域无法被Σ有限覆盖。

而$\exists (p_i,q_i)\in\Sigma$，$c\in(p_i,q_i)$ 记$\varepsilon_0=\min\{|p_i-c|,|q_i-c|\}$，$\exists \tilde{N}$ 当$n>\tilde{N}$时，$O(c,\varepsilon_0)\supseteq[a_n,b_n]$ 故$[a_n,b_n]\subseteq(p_i,q_i)$

因此$[a_n,b_n]$被Σ有限覆盖，矛盾 #.

$6° \Rightarrow 1°$ 证明：设$A\subseteq[a,b]$为一非空数集。以上确界为例：设$x'\in A$，假设A的上确界不存在。

则$\forall x\in[x',b]$，x满足：① $\exists x_0\in A$，$x_0>x$ ② $\exists \varepsilon_0>0$，$\forall x_i\in A$ $x_i\leqslant x-\varepsilon_0$ 其中的一个。也就是说，对于$\forall x\in[x',b]$，$\exists \varepsilon_t>0$。满足：① $\exists y\in A$，$y>x+\varepsilon_t$ ② $\forall y\in A$，$y\leqslant x-\varepsilon_t$ 中的一个。

令$\Delta x_i = O(x,\varepsilon_t)$，$\bigcup_{x'\leqslant x\leqslant b}\Delta x$ 是$[x',b]$的一个开覆盖，由有限覆盖原理，存在$\Delta x_1,\Delta x_2\cdots\Delta x_n$为有限个，$\bigcup_{i=1}^{n}\Delta x_i\supseteq[x',b]$，且$x_1<x_2<\cdots<x_n$。

设k是Δx_i中满足$\exists y\in A$，$y>x+\varepsilon_t$中的最大脚标，对于Δx_{k+1}，有$\forall y\in A$，$y\leqslant x-\varepsilon_t$ 故 $x_{k+1}-\varepsilon_{k+1}\geqslant y>x_k+\varepsilon_k$ 而$\Delta x_{k+1}\cap\Delta x_k\neq\phi$。

因此 $x_k+\varepsilon_k > x_{k+1}-\varepsilon_{k+1}$ 矛盾 #.

定理2：单调有界原理

定理3：闭区间套定理.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ 证明：设 $\{[a_i,b_i] \mid i=1,2,\cdots\}$ 为一无穷闭区间集，满足 $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则数列 $\{a_n\}\subseteq[a_1,b_1]$ 单调上升. 由单调有界原理 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} [a_n-(a_n-b_n)] = c$. 若 $d\neq c$, 且 $d\in[a_i,b_i]$.

由于 $a_n\leq c\leq b_n$ 因此 $c\in[a_n,b_n]$. 记 $\varepsilon=|d-c|$. $\exists N\in N_+$,

当 $n>N$ 时 $|a_n-b_n|<\varepsilon$. 因此, d与c无法同时在 $[a_n,b_n]$ 中. 矛盾. #

$3^\circ\Rightarrow 2^\circ$ 证明：设 $\{a_n\}$ 为一单调上升数列, $a_n\leq b$ (有界).

~~构造数列~~ $\cancel{c_n = a_n+\frac{1}{2^{n-1}}}$. ~~则~~ $\cancel{c_n\downarrow}$, $\cancel{c_n\geq c}$ $\cancel{c_n>a_n}$. ~~则对于无穷~~

~~闭区间列~~ $\cancel{[a_1,c_1],[a_2,c_2]\cdots}$ ~~有:~~

$$\cancel{[a_1,c_1]\supseteq[a_2,c_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,c_n]\supseteq\cdots}$$

$$\cancel{\text{且} \lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0.}$$

~~由区间套定理,~~ $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$ ~~存在~~

记 $x_1=\frac{a_1+b}{2}$ 若 $[x_1,b]\cap\{a_n\}\neq\phi$, 记 $b_1=x_1$, $c_1=b$. 否则, 记 $b_1=a_1$, $c_1=x_1$. 记 $x_2=\frac{b_1+c_1}{2}$ 若 $[x_2,c_1]\cap\{a_n\}\neq\phi$ 记 $b_2=x_2$, $c_2=c_1$ 否则, 记 $b_2=b_1$, $c_2=x_2$ $\cdots$ 反复进行下去

得一无穷区间序列满足 $[b_1,c_1]\supseteq[b_2,c_2]\supseteq\cdots\supseteq[b_n,c_n]\supseteq\cdots$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1-c_1}{2^{n-1}}=0$. 由区间套定理,

存在 $\xi\in[b_n,c_n]$, ξ是唯一公共点 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\xi$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时 $|b_n-c_n|<\varepsilon$. $\exists N_1\in N_+$, 当 $n>N_1$ 时

$a_n\in[b_n,c_n]$ 故 $|a_n-\xi|<\varepsilon$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\xi$.

定理 2：单调有界原理

定理 4：子列定理.

$2° \Rightarrow 4°$ 证明：设 $\{x_n\}$ 为一有界数列. $x_n \in [a,b]$.

令 $x_1 = \frac{a+b}{2}$ 则 $[a, x_1]$ 与 $[x_1, b]$ 至少有1含有 x_n 的无穷个. 记为 $[a_1, b_1]$, 并取 $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$. 令 $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ 则 $[a_1, x_2]$ 与 $[x_2, b_1]$ 至少有1含有 x_n 的无穷个. 记为 $[a_2, b_2]$, 并取 $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$, 且 $k_2 > k_1$

… 反复进行下去

得数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_{k_n}\}$. 对于数列 $\{a_n\}$, 单调上升, 且 $a_n \in [a_1, b_1]$ 有界, 由单调有界原理, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ 又 $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$ 由夹挤定理, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = c$. #

$4° \Rightarrow 2°$ 证明：设 $\{x_n\}$ 为一单调上升数列 $x_n \leq b$.

由子列定理, $\exists x_{n_k}$, $x_{n_k} \to c$. 则 $\forall x_n$, $x_n \leq c$. (若不然, $\exists N \in N_+$, $x_N > c$. 取 $n_{k_1} > N$, $x_{n_{k_1}} > c$, 而 x_{n_k} 单调上升, 矛盾).

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \in N_+$, 当 $k > K$ 时 $|x_{n_k} - c| < \varepsilon$ 令 $N = n_K$, 当 $n > N$ 时.

$|x_n - c| < \varepsilon$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

定理2：单调有界原理
定理5：柯西收敛准则

$2^\circ \Rightarrow 5^\circ$ 证明：$\Leftarrow$ 由于 $\forall \varepsilon>0$. $\exists N\in N_+$. 当 $n>N$ 时 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.
取 $n=N+1$，则 $|x_{N+1+p}-x_{N+1}|<\varepsilon$ 对 $\forall p\geq 1$ 成立. 因此 $\{x_n\}$ 在 $n\geq N+1$ 有界.
而 $x_1, x_2, \cdots x_N$ 为有限项. 故 $\{x_n\}$ 有界.
构造 $A=\{x|x_i, i=1,2,3\cdots\}$. A为一非空有界数集.
① 若A为有限集. 则 $\exists N\in N_+$. 当 $n>N$ 时 $x_n\equiv C$. 若不然，$\forall N\in N_+$.
当 $n>N$ 时 $x_n\not\equiv C$ 记 x_n 的值为 $r_1, r_2\cdots r_i$（有限），令 $\varepsilon_0=\min\{|r_1-r_2|,$
$|r_2-r_3|, \cdots |r_{i-1}-r_i|\}$ 对于 $\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}$ $\forall N\in N_+$ 当 $n>N$ 时 $\exists p_0\in N_+$. $|x_n-x_{n+p_0}|>\varepsilon$.
矛盾. 此时 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=C$.
② 若A为无限集 记 $A\subseteq[a,b]$. 令 $x_1=\frac{a+b}{2}$，则 $[a,x_1]$ 与 $[x_1,b]$ 至少有1含有A的无限项，记为 $[a_1,b_1]$. 令 $x_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，则 $[a_1,x_2]$ 与 $[x_2,b_1]$ 至少有1含有A的无限项，记为 $[a_2,b_2]$ 取 $x_{k_1}\in[a_1,b_1]$. $x_{k_2}\in[a_2,b_2]$. $k_2>k_1$.
… 反复进行下去，得 $\{a_n\}$. $\{b_n\}$. $\{x_{k_n}\}$.
容易知道. a_n 单调上升，$a_n\in[a,b]$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=C$
而 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=c$. 而 $a_n\leq x_{k_n}\leq b_n$
由夹挤定理，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}=c$.

$\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in N_+$. 当 $n>N$ 时，$|x_{k_n}-c|<\varepsilon$. 取 $\tilde{N}=k_n$. 当 $n>\tilde{N}$ 时
$|x_{k_n}-x_{k_n+p}|<\varepsilon$ 故 $|x_{k_n}-c|<2\varepsilon$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$.

$5^\circ\Rightarrow 2^\circ$ 证明：设 $\{x_n\}$ 为一单调上升数列. $x_n\leq b$.

若 $\exists\varepsilon_0>0$. $\forall N\in N_+$，$\exists n>N$，$\exists p_0\in N_+$ $|x_{n+p_0}-x_n|>\varepsilon_0$.
取 $N=1$ $\exists n_1>1$，$x_{n_1+p_0}-x_{n_1}>\varepsilon_0$.
取 $N=n_1+p_0$ $\exists n_2>n_1+p_0$ $x_{n_2+p_0}-x_{n_2}>\varepsilon_0$.
⋮
可得 $x_{n_1}, x_{n_1+p_0}, x_{n_2}, x_{n_2+p_0}\cdots$ 单调上升趋于正无穷
这与 $x_n\leq b$ 矛盾 #

（当 $n=[\frac{2b}{\varepsilon_0}]+2$ 时，$x_n>b$）.

定理2：单调有界原理
定理6：有限覆盖定理

$2°\Rightarrow 6°$ 证明：假设 $[a,b]$ 无法被 Σ 有限覆盖. 记 $x_1=\frac{a+b}{2}$. 则 $[a,x_1]$ 与 $[x_1,b]$ 至少有1个无法被 Σ 有限覆盖. 记为 $[a_1,b_1]$. 令 $x_2=\frac{a_1+b_1}{2}$. 则 $[a_1,x_2]$ 与 $[x_2,b_1]$ 至少有1个无法被 Σ 有限覆盖. 记为 $[a_2,b_2]$.
… 反复进行下去，得 $[a_i,b_i]$ 无法被 Σ 有限覆盖.

对于数列 $\{a_n\}$. a_n 单调上升. $a_n\in[a,b]$. 由单调有界原理.
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\frac{b-a}{2^n}=0$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

$\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in N_+$ 当 $n>N$ 时 $O(c,\varepsilon)\supseteq[a_n,b_n]$

因此. c 的任意邻域无法被 Σ 有限覆盖.

而 $\exists\Delta x_i=(p_i,q_i)$. $c\in(p_i,q_i)$ 记 $\varepsilon_0=\min\{|p_i-c|,|q_i-c|\}$. 则 $\Delta x_i\supseteq O(c,\varepsilon_0)$

因此. $O(c,\varepsilon_0)$ 被 Σ 有限覆盖. 矛盾 #.

$6°\Rightarrow 2°$ 证明：设 $\{x_n\}$ 为一单调上升的数列. $x_n\leq b$. 则 $\forall x\in[x_1,b]$. 假设 x_n 无极限. 则 x 满足 ① $\exists x_n$, $x_n>x$ ② $\exists\varepsilon_0$, $x_n<x-\varepsilon_0$ 中的一个. 即 $\forall x\in[x_1,b]$. $\exists\varepsilon t>0$ 满足 ① $\exists x_n$. $x_n>x+\varepsilon t$ ② ~~中~~ $x_n<x-\varepsilon t$ 中的一个. 令 $\Delta x_i=O(x_i,\varepsilon t_i)$. Σ 是 $[x_1,b]$ 的一个开覆盖.

由有限覆盖原理. $\exists\Delta x_1,\Delta x_2\cdots\Delta x_n$. $\bigcup\limits_{1\leq i\leq n}\Delta x_i\supseteq[x_1,b]$. 且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.
设 k 是满足 $\exists x_n$, $x_n>x_k$ 的最大脚标. 则对于 Δx_{k+1}. $x_n<x-\varepsilon_0$.
即 $x_{k+1}-\varepsilon t_{k+1}>x_n>x_k+\varepsilon t_k$. 而 $\Delta x_k\cap\Delta x_{k+1}\neq\phi$ 故 $x_{k+1}-\varepsilon t_{k+1}<x_k+\varepsilon t_k$
矛盾 #.

定理3：闭区间套定理
定理4：聚点定理.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$ 证明：设 A 为一非空无限集. $A \subseteq [a,b]$. 令 $x_1 = \frac{a+b}{2}$

则 $[a, x_1]$ 与 $[x_1, b]$ 至少有1含有 A 的无限项. 记为 $[a_1, b_1]$. 令 $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$

则 $[a_1, x_2]$ 与 $[x_2, b_1]$ 至少有1含有 A 的无限项. 记为 $[a_2, b_2]$

… 反复进行下去. 得到1无穷区间列 $[a_i, b_i]$, 满足

$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in N_+$. 当 $n > N$ 时.

$[a_n, b_n] \subseteq O(c, \varepsilon)$. 故 $O(c, \varepsilon) \cap A \neq \phi$.

因此 c 为聚点.

$4^\circ \Rightarrow 3^\circ$ 证明：由于 $\{a_n\}$ 单调上升. $a_n \in [a,b]$. 故 $\exists \{a_{nk}\}$.

$a_{nk} \to c$. 则 $\forall a_n$. $a_n \leq C$ (若不然. $\exists N \in N_+$, $a_N > c$. 则 $\forall nk > N$.

$a_{nk} > c$ 与 $a_{nk} \to c$ 矛盾).

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists K \in N_+$. 当 $k > K$ 时 $c - a_{nk} < \varepsilon$. $\forall n > nk$. $a_n > a_{nk}$

因此 $c - a_n < \varepsilon$. 即 $|a_n - c| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} [a_n - (a_n - b_n)] = c$. 由于 $a_n \leq c \leq b_n$

因此 c 为 $[a_n, b_n]$ 的公共点. 若 $d \neq c$. $d \in [a_n, b_n]$

记 $\varepsilon_0 = |c - d| > 0$. $\exists N \in N_+$. 当 $n > N$ 时 $|a_n - b_n| < \varepsilon_0$.

因此 c 与 d 无法同时在 $[a_n, b_n]$ 中. 矛盾 #.

定理3：闭区间套定理

定理5：柯西收敛准则.

$3° \Rightarrow 5°$ 证明：$\Leftarrow$ 由于 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，取 $n>N$，$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 对 $\forall p\in N_+$ 成立. 取 $n=N+1$，$|x_{N+1+p}-x_{N+1}|<\varepsilon$ 对 $\forall p\in N_+$ 成立

故 $\{x_n\}$ 在 $n\geq N+1$ 时有界. 而 $x_1, x_2 \cdots x_N$ 为有限项，故 $\{x_n\}$ 有界.

构造 $A=\{x \mid x_i,\ i=1,2,3\cdots\}$ 则 A 为非空有界数集. 记 $A\subseteq[a,b]$.

① 若 A 为有限集. 则 $\exists N\in N_+$，当 $n>N$ 时 $x_n\equiv c$.（若不然，$\forall N\in N_+$，当 $n>N$ 时，$x_n\not\equiv c$. 由于 $\{x_n\}$ 的取值有限，记为 $r_1, r_2\cdots r_i$ 互不相同. 令 $\varepsilon_0=\min\{|r_1-r_2|, |r_1-r_3|, \cdots |r_{i-1}-r_i|\}$. 对于 $\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2}$，$\forall N\in N_+$，当 $n>N$ 时，$\exists p_0\in N_+$，$|x_n-x_{n+p_0}|\geq\varepsilon$. 矛盾）. 此时 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$.

② 若 A 为无限集. 令 $x_1=\frac{a+b}{2}$，则 $[a,x_1]$ 与 $[x_1,b]$ 至少有1含有 x_n 的无限项. 记为 $[a_1,b_1]$. 并取 $x_{k_1}\in[a_1,b_1]$. 令 $x_2=\frac{a_1+b_1}{2}$. 则 $[a_1,x_2]$ 与 $[x_2,b]$ 至少有1含有 x_n 的无限项. 记为 $[a_2,b_2]$. 并取 $x_{k_2}\in[a_2,b_2]$ $k_2>k_1$

$\cdots$ 反复进行下去，得无穷闭区间列 $\{[a_i,b_i]\}$ 与子列 $\{x_{k_n}\}$.

且 $[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$. 由闭区间套定理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

又由 $a_n\leq x_{k_n}\leq b_n$ 由夹挤定理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_n}=c$.

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，当 $n>N$ 时 $|x_{k_n}-c|<\varepsilon$. $\exists N_1\in N_+$，当 $n>N_1$ 时 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 取 $\tilde{N}=\max\{N,N_1\}$ 当 $n>\tilde{N}$ 时 $|x_n-c|<2\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

$5° \Rightarrow 3°$ 证明：设 $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq [a_3,b_3] \supseteq \cdots$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 对于数列 $\{a_n\}$. $a_n>a_{n-1}$. 且 $a_n<b_1$.

若 $\exists \varepsilon_0>0$. $\forall N\in N_+$ $\exists n>N$ $\exists p_0\in N_+$. $a_{n+p_0}-a_n>\varepsilon_0$

取 $N=1$. $\exists n_1>1$ $a_{n_1+p_0}-a_{n_1}>\varepsilon_0$.

取 $N=n_1+p_0$. $\exists n_2>N$ $a_{n_2+p_0}-a_{n_2}>\varepsilon_0$

$\vdots$

得 $\{a_n\}$ 的一个子列 $a_{n_1}, a_{n_1+p_0}, a_{n_2}, a_{n_2+p_0}\cdots$.

且 $a_{n_1+p_0}>\varepsilon_0$, $a_{n_2+p_0}>2\varepsilon_0$ $\cdots$ $a_{n_t+p_0}>t\varepsilon_0$.

取 $t=[\frac{b_1}{\varepsilon_0}]+1$ 则 $a_{n_t+p_0}>t\varepsilon_0=([\frac{b_1}{\varepsilon_0}]+1)\varepsilon_0>b_1$

矛盾. 故 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in N_+$ 当 $n>N$ 时 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 对 $\forall p\in N_+$ 成立

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n-a_n=c$.

则 $a_n\leq c\leq b_n$ 因此 c 为 $[a_n,b_n]$ 的公共点.

记 $d\neq c$. d 也为 $[a_n,b_n]$ 的公共点.

$\exists \varepsilon_0=|d-c|>0$, $\exists N\in N_+$. 当 $n>N$ 时 $|b_n-a_n|<\varepsilon_0$

此时. $[a_n,b_n]$ 无法同时包含 d 与 c. 矛盾 #.

定理3：闭区间套定理
定理6：有限覆盖定理

$3° \Rightarrow 6°$ 证明：设被 Σ 覆盖的 $[a,b]$ 无法被有限覆盖，令 $x_1 = \frac{a+b}{2}$，则 $[a,x_1]$ 与 $[x_1,b]$ 至少有1无法被有限覆盖，记为 $[a_1,b_1]$，令 $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$，则 $[a_1,x_2]$ 与 $[x_2,b_1]$ 至少有1无法被有限覆盖 记为 $[a_2,b_2]$
… 反复进行下去，得无穷区间列 $[a_i,b_i]$ 无法被有限覆盖。
由于 $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \cdots$
且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0$ 由闭区间套定理，
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n = c$. 由于 $\exists \Delta x_i = (p_i, q_i)$，$c \in (p_i, q_i)$.
记 $\varepsilon_0 = \min\{|p_i-c|, |q_i-c|\}$. $\exists N \in N_+$，当 $n>N$ 时，$[a_n,b_n] \subseteq O(c,\varepsilon_0)$.
但是 $[a_n,b_n]$ 无法被有限覆盖，$[a_n,b_n] \subseteq \Delta x_i$ 矛盾 #.

$6° \Rightarrow 3°$ 证明：假设 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i] = \phi$. 则 $\forall x \in [a_1,b_1]$ $\exists n \in N_+$, $[a_n,b_n] \not\ni x$，故 $\exists \varepsilon_x$，$\exists N \in N_+$，当 $n>N$ 时 $[a_n,b_n] \cap O(x,\varepsilon_x) = \phi$.
令 $\Delta x = O(x,\varepsilon_x)$ $\bigcup \Delta x \supseteq [a,b]$，由有限覆盖定理，$\exists \Delta x_1, \Delta x_2 \cdots \Delta x_i$ 为有限个 $\bigcup\limits_{k=1}^{i}\Delta x_k \supseteq [a,b]$. 对 $x_1, x_2 \cdots x_i$ 分别存在 $n_1, n_2 \cdots n_i$.
当 $n > n_{1,2\cdots i}$ 时 $\Delta x_k \cap [a_n,b_n] = \phi$ 记 $\alpha = \max\{n_1, n_2 \cdots n_i\}$
则 $\forall \Delta x_i$，$\Delta x_i \cap [a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1}] = \phi$ 故 $[a_1,b_1] \cap [a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1}] = \phi$ 矛盾.
故存在 c，$a_n \le c \le b_n$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N_+$，当 $n>N$ 时 ~~$b_n - a_n \geq c - a_n > \varepsilon$~~ . $\varepsilon > b_n - a_n \geq c - a_n$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = c$ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n = \lim\limits_{n\to\infty}a_n - (a_n - b_n) = c$.

又由于收敛数列极限有唯一性，若 $\exists d$，$d \neq c$，且 $a_n \le d \le b_n$
则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = d$. 矛盾 #.

定理4：致密性定理
定理5：柯西收敛准则

$4^\circ \Rightarrow 5^\circ$ 证明：$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，当 $n>N$ 时 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 对任意 $p\in N_+$ 成立。取 $n=N+1$，$|x_{N+1+p}-x_{N+1}|<\varepsilon$ 对 $\forall p\geq 1$ 成立

因此 $\{x_n\}$ 在 $n\geq N+1$ 时有界，而 $x_1, x_2 \cdots x_N$ 为有限项。

故 $\{x_n\}$ 为有界数列。由子列定理，$\exists \{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to c$。

$\forall \varepsilon>0$，$\exists K\in N_+$，当 $k>K$ 时 $|x_{n_k}-c|<\varepsilon$。

$\exists N\in N_+$，当 $n>N$ 时 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 对 $\forall p\in N_+$ 成立。

取 $\tilde{N}=\max\{n_K, N\}$，当 $n>\tilde{N}$ 时 $|x_n-c|<2\varepsilon$。

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$。

$5^\circ \Rightarrow 4^\circ$ 证明：设 A 为一无穷有界数集，$A\subseteq[a,b]$，令 $x_1=\frac{a+b}{2}$ 则 $[a,x_1]$ 与 $[x_1,b]$ 至少有1含有 A 的无限项，记为 $[a_1,b_1]$，并取 $x_{k_1}\in[a_1,b_1]$，令 $x_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 则 $[a_1,x_2]$ 与 $[x_2,b_1]$ 至少有1含有 A 的无限项，记为 $[a_2,b_2]$，并取 $x_{k_2}\in[a_2,b_2]$，$k_2>k_1$ （$x_{k_1}, x_{k_2}\in A$）。

…反复进行下去，得一无穷序列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots$。

且有 $\forall N\in N_+$，当 $n>N$ 时 $x_{k_n}\in[a_n, b_n]$。

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N=\left[\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}\right]+2$，当 $m,n>N$ 时

$$|x_m-x_n|<|b_N-a_N|=\frac{b-a}{2^{n-1}}<\varepsilon$$ 故 $x_{k_n}\to c$。

$\forall \varepsilon>0$，$O(c,\varepsilon)\cap A\neq\phi$ 因此 c 为聚点。

定理4：致密性定理
定理6：有限覆盖定理

$4^\circ \Rightarrow 6^\circ$ 证明：假设 $[a,b]$ 无法被 Σ 有限覆盖，记 $x_1=\frac{a+b}{2}$，则 $[a,x_1]$ 与 $[x_1,b]$ 至少有1无法被 Σ 有限覆盖，记为 $[a_1,b_1]$，令 $x_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，
则 $[a_1,x_2]$ 与 $[x_2,b_1]$ 至少有1无法被 Σ 有限覆盖。
…反复进行下去，得无被 Σ 覆盖的 $[a_i,b_i]$。
对于数列 $\{a_n\}$，$a_n\nearrow$，$a_n\in[a,b]$，因此 $\exists a_{n_k}$，$a_{n_k}\to c$。
$\forall \varepsilon>0$，$\exists K\in N_+$，当 $k>K$ 时 $c-a_{n_k}<\varepsilon$，$\forall n>n_k$，$a_n>a_{n_k}$
故 $c-a_n<\varepsilon$　$|a_n-c|<\varepsilon$　故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$。
而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n-a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$　因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$。
$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，当 $n>N$ 时 $O(c,\varepsilon)\supseteq[a_n,b_n]$。
故 c 的任意 ε 邻域无法被有限覆盖，但 $c\in\Delta x_i=(p_i,q_i)$。
记 $\varepsilon_0=\min\{|p_i-c|,|q_i-c|\}$ 则 $\Delta x_i\supseteq O(c,\varepsilon_0)$ 矛盾 #。

$6^\circ \Rightarrow 4^\circ$ 证明：设A为有界无限集，$A\subseteq[a,b]$，若A无聚点，
则 $\forall x\in A$，$\exists \varepsilon_x>0$，使得 $O(x,\varepsilon_x)$ 只有A的有限项。
令 $\Sigma=\bigcup\limits_{a\le x\le b}\Delta x_\varrho$，$\Sigma$ 覆盖了 $[a,b]$，由有限覆盖定理，存在 $\Delta x_1\cdots\Delta x_n$ 为有限个，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i\supseteq[a,b]$，而 $\forall x_i$，其中只有A的有限项，这与A是无限集矛盾 #。

定理5：柯西收敛准则

定理6：有限覆盖原理.

$5^\circ\Rightarrow 6^\circ$ 证明：假设 $[a,b]$ 无法被 Σ 有限覆盖. 记 $x_1=\frac{a+b}{2}$. 则 $[a,x_1]$ 与 $[x_1,b]$ 至少有1无法被 Σ 有限覆盖. 记为 $[a_1,b_1]$ 记 $x_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, 则 $[a_1,x_2]$ 与 $[x_2,b]$ 至少有1无法被 Σ 有限覆盖. 记为 $[a_2,b_2]$.

…反复进行下去, 得无法被有限覆盖的闭区间列 $[a_i,b_i]$.

且有 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$. $\forall N\in N_+$, 当 $n>N$ 时 $[a_n,b_n]\subseteq[a_N,b_N]$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}]+1$. 当 $n>N$ 时,

$$|a_{n+p}-a_n|\leqslant|b_N-a_N|=\frac{b-a}{2^N}<\varepsilon \text{ 对}\forall p\in N_+\text{成立}.$$

故由柯西收敛准则, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时 $[a_n,b_n]\subseteq O(c,\varepsilon)$.

因此 c 的任意 ε 邻域均无法被 Σ 有限覆盖.

但是, 存在 $\Delta x_i=(p_i,q_i)\ni c$. 记 $\varepsilon_0=\min\{|c-p_i|,|c-q_i|\}$.

则 $O(c,\varepsilon_0)\subseteq\Delta x_i$ 可以被 Σ 有限覆盖. 矛盾 #.

$6^\circ\Rightarrow 5^\circ$ 证明: $\Leftarrow$ ① 当数列 $\{x_n\}$ 的取值有限时, 必 $\exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时, $x_n\equiv c$. 若不然. $\forall N\in N_+$, 当 $n>N$ 时 $x_n\not\equiv c$. 由于 $\{x_n\}$ 取值有限, 分别记为 $r_1,r_2\cdots r_t$ (互不相同). 对于 $\varepsilon_0=\min\{|r_1-r_2|,|r_1-r_3|\cdots,|r_{t-1},r_t|\}$, $\forall N\in N_+$, 当 $n>N$ 时 存在 n_0,p_0 s.t. $|x_{n_0+p_0}-x_{n_0}|>\frac{\varepsilon_0}{2}$ 矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

② 当数列 $\{x_n\}$ 的取值有无限个时. $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N_+$ 取 $n=N+1$, 则 $|x_{N+1+p}-x_{N+1}|<\varepsilon$ 对 $\forall p\geqslant1$ 成立, 因此 $\{x_n\}$ 在 $n\geqslant N+1$ 时有界. 而 $x_1,x_2\cdots x_N$ 为有限个. 故 $\{x_n\}$ 有界. 记 $\{x_n\}\subseteq[a,b]$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在, 则 $\{x_n\}$ 无收敛子列. 若不然, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_n}=c$. 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时 $|x_{k_n}-c|<\varepsilon$. $\exists N_1\in N_+$, 当 $n>N_1$ 时 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 对 $\forall p\in N_+$ 成立. 取 $\tilde N=\max\{k_N,N_1\}$, 当 $n>\tilde N$ 时 $|x_n-c|<2\varepsilon$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$. 矛盾.

因此，集合$A=\{x|x=x_i, i=1,2,\cdots\}$无聚点．故$\forall x\in[a,b]$，$\exists\varepsilon_x>0$，便得$O(x,\varepsilon_x)$中含有A的有限项．则$\Sigma=\bigcup_{a\le x\le b}O(x,\varepsilon_x)$是$[a,b]$的一个开覆盖．记$\Delta x=O(x,\varepsilon_x)$．由有限覆盖定理，存在$\Delta x_1, \Delta x_2 \cdots \Delta x_n$为有限个，且$\bigcup_{i=1}^{n}\Delta x_i\supseteq[a,b]$，而$\bigcup_{i=1}^{n}\Delta x_i$中至多有A的有限项，$[a,b]$中却有A的无限项，矛盾．故$\lim_{n\to\infty}x_n$存在．